АРХАНГЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ
государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Архангельской области «Архангельский государственный многопрофильный колледж»

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

ТЕМА 01. МНОЖЕСТВА И ОПЕРЦИИ НАД НИМИ

Понятие множества

Одно из основных понятий современной математики – понятие ***множества***. Оно является первичным, т. е. не поддается определению через другие, более простые понятия. С понятием множества мы встречаемся довольно часто: буквы русского алфавита образуют множество, то же можно сказать о словоупотреблениях, содержащихся в данном предложении, на данной странице и т. д.

Приведенные примеры обладают одним существенным свойством: все эти множества состоят из определенного конечного числа объектов, которые мы будем называть ***элементами множества***. При этом каждый из объектов данного вида либо принадлежит, либо не принадлежит рассматриваемому множеству. Так, например, буква ***ф*** вне всякого-сомнения принадлежит множеству букв, образующих русский алфавит, в то время как буква ***f*** этому множеству не принадлежит.

Множества, включающие только такие объекты, принадлежность или непринадлежность которых к тому или иному множеству не вызывает сомнения, называются ***четкими множествами***. Поскольку каждый рассматриваемый объект либо принадлежит, либо не принадлежит к рассматриваемому четкому множеству, эти множества всегда имеют ясно очерченные границы. Четким множествам противопоставлены ***нечеткие*** или «лингвистические» ***множества***, включающие такие объекты, которые могут быть отнесены к тому или иному множеству лишь с определенной степенью достоверности.

Понятие нечеткого множества можно проиллюстрировать на примере семантических полей прилагательных *младенческий, детский, отроческий, юношеский, молодой, среднего возраста, старый*. Чтобы определить границы семантических полей указанных слов и словосочетаний, произведем следующий эксперимент.

Аппарат нечетких множеств может применяться для описания процессов мышления, лингвистических явлений и вообще для моделирования человеческого поведения, при котором допускаются частичные истины, а строгий математический формализм не является категорически необходимым.

Множества, которые состоят из конечного числа элементов, называются ***конечными множествами***. К числу конечных множеств относится также и *пустое множество,* т.е. множество, не содержащее ни одного элемента.

Приходится рассматривать и ***бесконечные множества***. Например, бесконечным является множество всех словоупотреблений в текстах данного языка при условии, что этот язык беспрерывно порождает и будет порождать новые тексты без какого-либо ограничения во времени.

Способы задания множества

Произвольные множества будем обозначать прописными, а элементы множества – строчными буквами латинского алфавита, пустое множество – символом **Ø**.

Существуют два различных способа задания множества. Можно дать полный перечень элементов этого множества. Этот способ называется ***перечислением множества***. Элементы перечисляемого множества заключают обычно в фигурные скобки. Например, множество ***A***, состоящее из букв русского алфавита, вместе с пробелом (его обозначают знаком ∆) запишется так: ***A* = {*а, б, в, ..., ю, я,* ∆}**.

Другой способ состоит в том, что задается свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий рассматриваемому множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий. Этот способ называют ***описанием множества***, а свойство, определяющее множество, – ***характеристическим***. $M = \{x \ / \ x \in N, x \leq 6\}$- Множество М состоит из таких элементов х, обладающих свойством х≤6, где х – натуральное число.

При описании множеств используются различные символы, операции. Если ***A*** есть некоторое множество, а ***x*** – входящий в него объект, то символическая запись ***x*** ∈ ***A*** означает, что ***x*** является элементом множества ***A***; при этом говорят: *«**x*** входит в ***A***», *«**x*** принадлежит ***A***». Если ***x*** не принадлежит множеству ***A***, то пишут ***x*** ∉ ***A***. Пусть, например, ***A*** есть множество букв русского алфавита, тогда, обозначив букву ***д*** как элемент ***x***, а букву ***d*** как элемент ***y***, можно записать ***x*** ∈ ***A, y*** ∉ ***A***. В том случае, когда речь идет о нечетком множестве, указывается степень достоверности, с которой ***x*** принадлежит множеству ***A,*** Это выражается записью ***P*** (***x*** ∈ ***A***). Например, пусть ***A*** – множество юношей, а ***x*** обозначает двадцатилетнего мужчину; тогда, исходя из приведенных выше рассуждений, можно записать ***0,5*** (***x*** ∈ ***A***).

Отношения между множествами

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, английский математик Джон Венн (1834 - 1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Леонард Эйлер (1707 - 1783) для этих целей использовал круги, при этом точки внутри круга считались элементами множества. Такие изображения сейчас называют диаграммами Эйлера - Венна.

Пусть даны два произвольных множества ***A*** и ***B***, тогда возможны пять случаев отношений между ними:

1. Множества ***A*** и ***B*** не имеют общих элементов (см. рис. 1а).
2. Множества ***A*** и ***B*** имеют общие элементы, но не все элементы множества ***A*** принадлежат множеству ***B*** , и не все элементы множества ***B*** принадлежат множеству ***A***. В этом случае говорят о ***пересечении*** множеств ***A*** и ***B*** (см. рис. 1б).
3. Все элементы множества ***B*** принадлежат множеству ***A***, но не все элементы множества ***A*** принадлежат множеству ***B***. В этом случае говорят о ***включении*** множества ***B*** во множество ***A*** (см. рис. 1в).

Определение: Если имеются два множества ***A*** и ***B***, причем каждый элемент множества ***B*** принадлежит множеству ***A,*** то множество ***B*** называется ***подмножеством*** множества ***A***. Записывается это так: $\boldsymbol{B \subset A}$.

Само множество ***A*** и пустое множество **Ø** называют ***несобственными*** подмножествами множества ***A***. Все остальные подмножества называются ***собственными***.

4. Все элементы множества ***A*** принадлежат множеству ***B***, но не все элементы множества ***B*** принадлежат множеству ***A***. В этом случае говорят о ***включении*** множества ***A*** во множество ***B*** (***A*** ⊂ ***B)*** (см. рис. 1г).
5. Все элементы множества ***A*** принадлежат множеству ***B*** и все элементы множества ***B*** принадлежат множеству ***A***. В этом случае говорят, что множества ***A*** и ***B*** равны (см. рис. 1д).

Определение: а) Два множества ***A*** и ***B*** называются ***равными*** (или совпадающими), если ***A*** ⊂ ***B*** и ***B*** ⊂ ***A***.

б) Два множества ***A*** и ***B*** называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывается это так: ***A = B***.

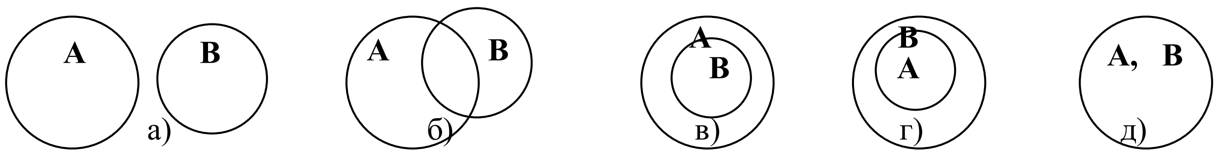

Рис. 1

Определение: Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется ***универсальным***. Универсальное множество будем обозначать буквой ***U***.

Основные операции над множествами

Основными операциями, осуществляемыми над множествами, являются *сложение (объединение), умножение (пересечение)* и *вычитание.* Эти операции, как мы увидим дальше, не тождественны одноименным операциям, производимым над числами.

<u>*Определение*</u>: ***Объединением*** (или *суммой)* двух множеств ***A*** и ***B*** называется множество, содержащее все такие и только такие элементы, которые являются элементами хотя бы одного из этих множеств. Объединение множеств ***A*** и ***B*** обозначают как ***A* ∪ *B***.

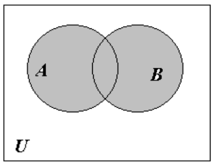

Рис. 1.

Это определение означает, что сложение множеств ***A*** и ***B*** есть объединение всех их элементов в одно множество ***A* ∪ *B***. Если одни и те же элементы содержатся в обоих множествах, то в объединение эти элементы входят только по одному разу.

Аналогично определяется объединение трёх и более множеств.

<u>*Определение*</u>: ***Пересечением*** (или *умножением)* двух множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству ***A*** и множеству ***B*** одновременно. Пересечение множеств ***A*** и ***B*** обозначают как ***A* ∩ *B***.

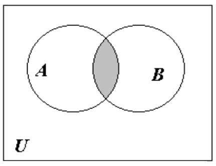

Рис. 2.

Аналогично определяется пересечение трёх и более множеств.

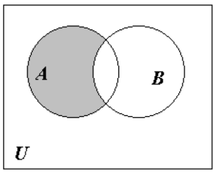

Рис. 3.

<u>*Определение*</u>: ***Разностью*** множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множества ***A*** и которые не принадлежат множеству ***B***. Разность множеств ***A*** и ***B*** обозначают как ***A* \ *B***. Операция, при помощи которой находится разность множеств, называется *вычитанием.*

Если ***B* ⊂ *A***, то разность ***A* \ *B*** называется ***дополнением*** множества ***B*** до множества ***A***. Если множество ***B*** является подмножеством универсального множества ***U***, то дополнение ***B*** до ***U*** обозначается $\overline{\mathbf{B}}$, то есть $\overline{\mathbf{B}}$ **=** ***U* \ *B***.

<u>*Определение:*</u> **Декартовым произведением множеств А и В** называется множество пар, первая компонента которых принадлежит множеству А, вторая множеству В. Обозначают А В. Таким образом А В = {(x;y) | x А, y В}.

Операцию нахождения декартового произведения множеств А и В называют декартовым умножением этих множеств.

Рассмотрим следующий пример. Известно, что А В={(2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6)}. Установим, из каких элементов состоят множества А и В. Так как первая компонента пары декартового произведения принадлежит множеству А, а вторая – множеству В, то данные множества имеют следующий вид: А={2, 3}, В={3, 5, 6}.

Перечислим элементы, принадлежащие множеству А В, если А={a, b, c, d}, В=А. Декартово произведение А В={(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b) ,(d, c), (d, d)}.

Список литературы по теме:

1. Вечтомов, Е. М. Математика: логика, теория множеств и комбинаторика : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 243 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-06616-6. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт].
2. Фрейлах, Н. И. Математика для воспитателей : учебник / Н.И. Фрейлах. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2021. — 136 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0767-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1232306.