

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ

государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

Архангельской области «Архангельский государственный многопрофильный колледж»

**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

**ТЕМА 01. Матрицы: основные понятия, действия. Определители: понятие, вычисление. Системы линейных уравнений.**

1. **Матрицы**
	1. Основные понятия.

*Матрица* – прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины)

$$А= \left(\begin{matrix}а\_{11}&а\_{12}…&а\_{1n} \\..&..&..\\а\_{m1}&а\_{m2}&а\_{mn}\end{matrix}\right)$$

m x n - размер матрицы

$А= \left(а\_{ij}\right)$ сокращенная запись, $а\_{ij –}- элемент матрицы, $i - номер строки, j - номер столбца.

*Квадратная матрица* – число строк равно числу столбцов.

*Главная диагональ* – элементы матрицы стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла.

*Единичная матрица* – все элементы главной диагонали раны единицы.

Е= $\left(\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right)$ единичная матрица второго порядка.

*Нулевая матрица* – все элементы равны нулю.

*Вектор – матрица* – матрица, содержащая один столбец или одну строку.

$В= \left(\begin{matrix}в\_{1}&в\_{2}&в\_{3}\end{matrix}\right)$ А= $\left(\begin{matrix}а\_{1}\\а\_{2}\end{matrix}\right)$

*Транспонирована матрица* – матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером.

$А= \left(\begin{matrix}1&2\\3&4\end{matrix}\right)$ $А^{Т}= \left(\begin{matrix}1&3\\2&4\end{matrix}\right) $

в. Действия над матрицами.

1) *Сложение* (для матриц одинаковых размеров)

Суммой двух матриц называется матрица $С\_{m×n}=\left(c\_{ij}\right)$, такая что $c\_{ij}$=$а\_{ij}+в\_{ij}$,

i = $\overbar{1, m}$ , j = $\overbar{1, n}$

2) *Вычитание*

Разностью двух матриц называется матрица $С\_{m×n}=\left(c\_{ij}\right)$, такая что $c\_{ij}$=$а\_{ij}- в\_{ij}$,

i = $\overbar{1, m}$ , j = $\overbar{1, n}$

3)*Умножение на число*

Произведение матрицы $А= \left(а\_{ij}\right)$ на число к называется матрица $В= \left(в\_{ij}\right)$ такая, что

$в\_{ij}$=$к∙а\_{ij}$, i = $\overbar{1, m}$ , j = $\overbar{1, n}$

4) *Произведение* (рассматривается для случая: число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы)

Произведением матрицы$А\_{m×n}= \left(а\_{ij}\right)$ на матрицу $В\_{n×p}= \left(в\_{jk}\right)$ называется матрица $С\_{m×n}=\left(c\_{ij}\right)$такая, что$ c\_{ij}$= $а\_{i1}∙в\_{1к}+а\_{i2}∙в\_{2к}$+$а\_{i3}∙в\_{3к}+ …$+$а\_{in}∙в\_{nк}$

1. Определители

*Квадратной матрицы А порядка n можно сопоставить число det A (∆), которое называется определителем*

1. n=1 A=(a1 ) ∆= a1

2. n=2 A= $\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right)$ ∆ = $a\_{11}∙a\_{22}-a\_{12}∙a\_{21}$

3. n=3 A= $\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right)$

∆ = $ a\_{11}∙a\_{22} ∙a\_{33}+a\_{21}∙a\_{13}∙a\_{32}$+$a\_{12}∙a\_{23}∙a\_{13}-a\_{13}∙a\_{22}∙a\_{31}-a\_{32}∙a\_{23}∙a\_{11}-a\_{21}∙a\_{12}∙a\_{33}$

Схема вычисления определителя третьего порядка (Рис.1):

 +

а33 а31

а32 а33

 а13  а32

Рис.1

**2.Решение задач**

**Пример 1**.Найти сумму и разность матриц

$A\_{2×2}=\left(\begin{matrix}1&2\\3&4\end{matrix}\right)$ $B\_{2×2}=\left(\begin{matrix}3&-4\\5&2\end{matrix}\right)$

Решение.

Суммой двух матриц называется матрица $С\_{m×n}=\left(c\_{ij}\right)$, такая что $c\_{ij}$=$а\_{ij}+в\_{ij}.$ Найдем все элементы результирующей матрицы:

$с\_{11}=$ $а\_{11}+в\_{11}=1+3=4$

$с\_{12}=$ $а\_{12}+в\_{12}=2+\left(-4\right)=-2$

$с\_{21}=$ $а\_{21}+в\_{21}=3+5=8$

$с\_{22}=$ $а\_{22}+в\_{22}=4+2=6$

Получаем матрицу: С= $\left(\begin{matrix}4&-2\\8&6\end{matrix}\right)$

Разностью двух матриц называется матрица $С\_{m×n}=\left(c\_{ij}\right)$, такая что $c\_{ij}$=$а\_{ij}- в\_{ij}$. проведем вычисления.

С= $\left(\begin{matrix}1-3&2+4\\3-5&4-2\end{matrix}\right) $= $\left(\begin{matrix}-2&6\\-2&2\end{matrix}\right)$

**Пример 2**.Найти произведение матрицы А на число **к**. А= $\left(\begin{matrix}2&-3&0\\4&5&6\end{matrix}\right)$, к=2.

Решение.

Произведение матрицы $А= \left(а\_{ij}\right)$ на число **к** называется матрица $В= \left(в\_{ij}\right)$ такая, что

$в\_{ij}$=$к∙а\_{ij}$.

В = Ак = $\left(\begin{matrix}2∙2&-3∙2&0∙2\\4∙2&5∙2&6∙2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}4&-6&0\\8&10&12\end{matrix}\right)$

**Пример 3**.Даны две матрицы.

А= $\left(\begin{matrix}1&-1&2\\0&2&3\\1&4&1\end{matrix}\right)$, В= $\left(\begin{matrix}0&1\\1&1\\2&-2\end{matrix}\right)$

Вычислить произведение АВ и ВА.

Решение.

Поскольку число столбцов матрицы *А* равно числу строк матрицы *В,* то произведение матриц *АВ* имеет смысл. По формуле получаем в произведении матрицу размера 3x2:

с11= 1∙0+(-1)∙1+2∙2 =0-1+4=3 первая строка на первый столбец

с12= 1∙1+(-1)∙1+2∙(-2) =1-1-4=-4 первая строка на второй столбец

с21= 0∙0+2∙1+3∙2 =0+2+6=8 вторая строка на первый столбец

с22= 0∙1+2∙1+3∙(-2) =0-1- 6=-4 вторая строка на второй столбец

с31= 1∙0+4∙1+1∙2 =0+4+2 =6 третья строка на первый столбец

с33= 1∙1+4∙1+1∙(-2) =1+4-2=3 третья строка на третий столбец

С= АВ = $\left(\begin{matrix}3&-4\\8&-4\\6&3\end{matrix}\right)$

Произведение *ВА* не имеет смысла, так как число столбцов матрицы *В*не совпадает с числом строк матрицы *А.*

**Пример 4**. Даны две матрицы А =$\left(\begin{matrix}2&3\\4&-1\end{matrix}\right)$, В= $\left(\begin{matrix}1&0\\5&-2\end{matrix}\right)$

Вычислить произведение АВ и ВА.

Решение.

Поскольку число столбцов матрицы *А* равно числу строк матрицы *В,* то произведение матриц *АВ* имеет смысл:

АВ= $\left(\begin{matrix}2&3\\4&-1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}1&0\\5&-2\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}2∙1+3∙5&2∙0+3∙(-2)\\4∙1+(-1)∙5&4∙0+\left(-1\right)∙(-2)\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}17&-6\\-1&2\end{matrix}\right)$

Поскольку число столбцов матрицы *В* равно числу строк матрицы А*,* то произведение матриц *АВ* имеет смысл:

ВА = $\left(\begin{matrix}1&0\\5&-2\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}2&3\\4&-1\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}1∙2+0∙4&1∙3+0∙(-1)\\5∙2+(-2)∙4&5∙3+\left(-2\right)∙(-1)\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}2&3\\2&17\end{matrix}\right)$

**Пример 5**. Вычислить определитель матрицы А= $\left(\begin{matrix}2&-3\\5&6\end{matrix}\right)$

Решение.

Для матрицы второго порядка определитель вычисляется ∆ = $a\_{11}∙a\_{22}-a\_{12}∙a\_{21}$

∆ = $\left|\begin{matrix}2&-3\\5&6\end{matrix}\right|=2∙6—3∙5=12+15=27$

**Пример 6**. Вычислить определитель матрицы А=$ \left(\begin{matrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{matrix}\right)$

Решение.

Для вычисления определителя матрицы третьего порядка воспользуемся схемой рис.1.

∆=$\left|\begin{matrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{matrix}\right|=2∙3∙3+1∙2∙1+4∙5∙3-3∙3∙3-1∙5∙3-2∙4∙2=18+2+60-27-15-16=80-58=22$

1. *Общий вид и свойства системы линейных уравнений*.

Система линейных уравнений с неизвестными имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{11}x\_{1}+a\_{12}x\_{2}+…+ a\_{1n}x\_{n}=b\_{1}\\a\_{21}x\_{1}+a\_{22}x\_{2}+…+ a\_{2n}x\_{n}=b\_{2}\\…………………..\\a\_{m1}x\_{1}+a\_{m2}x\_{2}+…+ a\_{mn}x\_{n}=b\_{m} \end{array}\right.$$

$a\_{ij}$ – коэффициенты при неизвестных, $b\_{i}$ - свободные члены, i – номер уравнения, j – номер неизвестного.

Решение системы уравнений – набор n чисел $x\_{1}, x\_{2, …..,}x\_{n}$, при подстановке которых в эту систему каждое уравнение этой системы превращается в тождество.

Совместная система уравнений – имеет хотя бы одно решение.

Несовместная система уравнений – не имеет решений.

Определенная система уравнений – имеет одно решение.

Неопределенная система уравнений – больше одного решения.

4) *Метод Крамера*.

1.Составить главный определитель из коэффициентов при неизвестных

∆=$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}…&a\_{1n}\\..&..&..\\a\_{n1}&a\_{n2}…&a\_{nn}\end{matrix}\right|$

2.Составить вспомогательные определители путем замены в главном определителе соответствующего столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

∆(х1) =$\left|\begin{matrix}b\_{1}&a\_{12}…&a\_{1n}\\..&..&..\\b\_{n}&a\_{n2}…&a\_{nn}\end{matrix}\right|$ ∆(х2) =$\left|\begin{matrix}a\_{11}&b\_{1}…&a\_{1n}\\..&..&..\\a\_{n1}&b\_{n}…&a\_{nn}\end{matrix}\right|$ …. ∆(хn) =$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}…&b\_{1}\\..&..&..\\a\_{n1}&a\_{n2}…&b\_{n}\end{matrix}\right|$

3.Если главный определитель не равен нулю, то решение системы находиться по формулам Крамера:

$x\_{1}=\frac{∆(х1)}{∆}$ , $ x\_{1}=\frac{∆(х2)}{∆}$, …. $x\_{n}=\frac{∆(хn)}{∆}$

*5)Метод Гаусса.*

Рассмотрим метод Гаусса на конкретном примере. Решить систему уравнений.

$$\left\{\begin{array}{c}2x\_{1}+7x\_{2}+ 13x\_{3}=0\\3x\_{1}+14x\_{2}+ 12x\_{3}=18\\5x\_{1}+25x\_{2}+ 16x\_{3}=39\\\end{array}\right. $$

Решение.

**Прямой ход.**

Составим расширенную матрицу: $\left(\begin{matrix}2&7&13 0\\3&14&12 18\\5&25&16 39\end{matrix} \right)$

Примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее неизвестное – х1 , первым ведущим элементом $a\_{11}=2$. Исключим х1 из второго и третьего уравнений:

А) Умножим первую строку на - $\frac{а\_{21}}{а\_{11}}= -\frac{3}{2}$

2$∙\left(-\frac{3}{2}\right)$ 7$∙\left(-\frac{3}{2}\right)$ 13$∙\left(-\frac{3}{2}\right) $0$∙\left(-\frac{3}{2}\right)$

В итоге получаем первую строку матрицы: -3 $-\frac{21}{2}$ $-\frac{39}{2}$ 0.

Б) Прибавим ко второй строке ведущую (полученную первую строку):

-3+3 $-\frac{21}{2}+14$ $ -\frac{39}{2}+12$ 0+18

0 $\frac{7}{2}$ $-\frac{15}{2}$ 18

В итоге матрица примет вид:

$$\left(\begin{matrix}2&7&13 0\\0&\frac{7}{2}&-\frac{15}{2} 18\\5&25&16 39\end{matrix} \right)$$

В) Умножим первую строку на - $\frac{а\_{31}}{а\_{11}}= -\frac{5}{2}$

2$∙\left(-\frac{5}{2}\right)$ 7$∙\left(-\frac{5}{2}\right)$ 13$∙\left(-\frac{5}{2}\right) $0$∙\left(-\frac{5}{2}\right)$

-5 -$ \frac{35}{2}$ -$ \frac{65}{2}$ 0

Г) Прибавим к третьей строке ведущую:

-5+5 $-\frac{35}{2}+25$ $ -\frac{65}{2}+16$ 0+39

 0 $\frac{15}{2}$ $-\frac{33}{2}$ 39

В итоге матрица примет вид:

$$\left(\begin{matrix}0&7&13 0\\0&\frac{7}{2}&-\frac{15}{2} 18\\0&\frac{15}{2}& -\frac{33}{2} 39\end{matrix} \right)$$

Примем за второе ведущее уравнение второе уравнение системы, а за второе ведущее неизвестное – х2 , вторым ведущим элементом $a\_{22}=\frac{7}{2}$. Исключим х2 из второго и третьего уравнений:

А) Умножим второе уравнение на -$ \frac{а\_{32}}{ а\_{22}}= - \frac{\frac{15}{2}}{\frac{7}{2}}= -\frac{15}{7}$

0∙$(-\frac{15}{7}$) $\frac{7}{2}(-\frac{15}{7})$ $\left(-\frac{15}{2}\right)(-\frac{15}{7})$ 18∙$(-\frac{15}{7})$

0 $-\frac{15}{2}$ $\frac{225}{14}$ $-\frac{270}{7}$

Б) Прибавим к третьему уравнению второе ведущее:

0+0 $- \frac{15}{2}$+$\frac{15}{2}$ $ \frac{225}{2} - \frac{33}{2}$ $ - \frac{270}{7}+39$

0 0 $ \frac{3}{7}$ $ \frac{3}{7}$

Получаем:

$$\left(\begin{matrix}2&7&13 0\\0& \frac{7}{2}&-\frac{15}{2} 18\\0&0& \frac{3}{7} \frac{3}{7}\end{matrix} \right)$$

**Обратный ход.**

Запишем полученную систему уравнений: $\left\{\begin{array}{c}2х\_{1}+7х\_{2}+13х\_{3}=0\\ \frac{7}{2}х\_{2}-\frac{15}{2}х\_{3}=18\\ -\frac{3}{7}х\_{3}=\frac{3}{7}\end{array}\right.$

Из последнего уравнения найдем:

$$х\_{3=}-\frac{3}{7}∙\frac{7}{3}=-1$$

Из второго уравнения найдем $х\_{2}$, подставив $х\_{3=}-1$:

$$\frac{7}{2}х\_{2}-\frac{15}{2}∙\left(-1\right)=18$$

$$\frac{7}{2}х\_{2}=-\frac{15}{2}+18$$

$$\frac{7}{2}х\_{2}=\frac{-15+36}{2}$$

$$х\_{2}=\frac{21}{2}∙\frac{2}{7}=3$$

Из первого уравнения найдем $х\_{1}$, подставив $х\_{3=}-1 и х\_{2}$=3:

$$2х\_{1}+7∙3+13∙(-1)=0$$

$$2х\_{1}=-21+13$$

$$х\_{1}=\frac{-8}{2}=-4$$

В итоге получаем решение системы уравнений: $х\_{1}=-4$ , $х\_{2}=3$, $х\_{3}=-1$

**Пример 7.** Найти решение системы уравнений по методу Крамера.

$$\left\{\begin{array}{c}х\_{1}+2х\_{2}+х\_{3}=1\\2х\_{1}+3х\_{2}+2х\_{3}=2\\х\_{1}-х\_{2}+3х\_{3}=0\end{array}\right.$$

1.Составим и вычислим главный определитель из коэффициентов при неизвестных

∆=$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&2&1\\2&3&2\\1&-1&3\end{matrix}\right|=1∙3∙3+2∙2∙1+2∙1∙\left(-1\right)-1∙3∙1-2∙2∙3- 2∙\left(-1\right)∙1=-2$

2.Составить вспомогательные определители путем замены в главном определителе соответствующего столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

∆(х1) =$\left|\begin{matrix}b\_{1}&a\_{12}&a\_{13}\\b\_{2}&a\_{22}&a\_{23}\\b\_{3}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&2&1\\2&3&2\\0&-1&3\end{matrix}\right|=1∙3∙3+2∙2∙0+2∙1∙\left(-1\right)-1∙3∙0- 2∙2∙3- 2∙\left(-1\right)∙1=-3$

 ∆(х2) = $\left|\begin{matrix}a\_{11}&b\_{1}&a\_{13}\\a\_{21}&b\_{2}&a\_{23}\\a\_{31}&b\_{3}&a\_{33}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&1&1\\2&2&2\\1&0&3\end{matrix}\right|=1∙3∙3+2∙0∙1+2∙1∙1-1∙2∙1- 2∙1∙3- 2∙0∙1=0$

∆(х3) = $\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&b\_{1}\\a\_{21}&a\_{22}&b\_{2}\\a\_{31}&a\_{32}&b\_{3}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&2&1\\2&3&2\\1&-1&0\end{matrix}\right|=1∙3∙0+2∙2∙1+2∙(-1)∙1-1∙3∙1- 2∙1∙(-1)- 2∙0∙2=1$

3. Главный определитель не равен нулю, решение системы находиться по формулам Крамера:

$x\_{1}=\frac{∆(х1)}{∆}$ =$\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$ , $ x\_{2}=\frac{0}{-2}=0$, $x\_{3}=\frac{1}{-2}$

**Список литературы по теме:**

1. *Лубягина, Е. Н.* Линейная алгебра : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. Н. Лубягина, Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 150 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-12504-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517608>
2. *Малугин, В. А.* Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для среднего профессионального образования / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 478 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-8802-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: [https://urait.ru/bcode/513569](https://urait.ru/bcode/513569%22%20%5Ct%20%22_blank)